به نام خدا

تابع درجه دوم

تهیه و تنظیم : آرش رحیمی

کدام مبحث درسی را سراغ دارید که قسمتی از حل آن نیاز به حل معادله‌ی درجه دوم نداشته باشد؟

قطعاً تعداد بی‌شماری مبحث را می‌توان برشمرد که با تسلط در مبحث معادله درجه دوم با سرعت بیش‌تری می‌توان آن مسائل را حل نمود.

اما در مبحث معادله درجه دوم و تابع درجه دوم ، به دلیل هماهنگی در عناوین ، قابلیت طرح هم‌زمان دارند.

پیشنهادات زیر به شما کمک می‌کند با باز مرتب‌سازی سؤالات کنکور از کتاب آبی ، اضافه کردن سؤالات جدید به هر دسته‌ی پیشنهادی ، آموزش را از سطح به عمق برده و کاملاً در این مبحث مسلط شوند.

- تعداد ریشه‌ها

✓ در معادلاتی که a و c مختلف العلامه هستند $(ac < 0)$ بدون محاسبه‌ی Δ می‌توان گفت $\Delta > 0$

✓ اگر $\Delta < 0$ باشد یا عبارت همواره مثبت یا همواره منفی است . (با توجه به علامت a یعنی ضریب x^2)

- جمع و ضرب بین ریشه‌ها

✓ در حالاتی که عبارت جبری بر حسب ریشه‌ها را می‌خواهند ، مثلاً $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$ یا $(2x_1 - 3)(2x^2 - 3)$ با دسته‌بندی و فاکتورگیری و استفاده از s و p حاصل عبارت را بدست می‌آوریم.

✓ حفظ کردن مجموع مربعات و مجموع مکعبات ریشه‌ها $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p \\ x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp \end{cases}$

به دلیل استفاده ی زیاد طراحان تست ، کمک زیادی در حل سریع‌تر تست‌ها می‌کند.

✓ در عبارت‌های نامتقارن برای x_1 و x_2 ، باید برای حل ، از خود معادله کمک گرفت.

✓ در مسائلی که به فارسی ، عبارت را می‌خواهند ، باید از آخر به اول خواند. مثلاً

مجموع معکوس ریشه‌ها $\rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

معکوس مجموع ریشه‌ها $\rightarrow \frac{۱}{x_۱ + x_۲}$

- ریشه‌ها را بدهند و معادله را بخواهند

✓ اگر $\{x_۱, x_۲\}$ ریشه‌ها باشد $\begin{cases} \delta = x_۱ + x_۲ \\ p = x_۱ x_۲ \end{cases}$ آن‌گاه $x^۲ - \delta x = +p = ۰$

✓ اگر یک ریشه به فرم $a + \sqrt{b}$ باشد، ریشه دیگر مزدوج آن یعنی $a - \sqrt{b}$ است.(دقت شود مزدوج روی رادیکال اتفاق می‌افتد.)

{اگر یک ریشه $۲ + \sqrt{۳}$ باشد،ریشه دیگر $۲ - \sqrt{۳}$ است.

{اگر یک ریشه $۳\sqrt{۲} - ۵$ باشد،ریشه دیگر $-۳\sqrt{۲} - ۵$ است.

- یک ریشه بدهند و ریشه دیگر بخواهند:

✓ در این مسائل ، ابتدا صورت معادله را بررسی می کنیم. سه حالت پیش می آید:

الف) جمع ریشه ها معلوم است: $x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \Leftarrow$ به جای $x_۱$ ریشه داده شده را گذاشته، $x_۲$ را می یابیم

ب) ضریب ریشه ها معلوم است: $x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} \Leftarrow$ به جای $x_۱$ ریشه داده شده را گذاشته، $x_۲$ را می یابیم.

ج) نه جمع نه ضرب ریشه ها معلوم نیست: ریشه ها را در معادله گذاشته، مجهول را یافته و سپس ریشه ی دیگر را می یابیم.

✓ در مواردی که یکی از ریشه ها مربع یا مکعب یا دو برابر یا نصف ریشه ی دیگر است، هم از موارد فوق استفاده می کنیم

✓ ریشه های قرینه و معکوس

اگر ریشه ها قرینه باشند: $b = ۰ \Leftarrow$
اگر ریشه ها معکوس باشند: $a = c \Leftarrow$

✓ دقت شود پس از به دست آوردن مجهولِ مورد نظر، با جایگذاری آن در معادله ی اصلی، مثبت بودن Δ بررسی شود.

✓ یک معادله بدهند معادله ی دیگری بخواهند که ریشه های این دو معادله رابطه ی خاصی با هم داشته باشند.

الف) ریشه هایش k واحد بیش تر باشد: $x \rightarrow x - k$

ب) ریشه هایش k واحد کم تر باشد: $x \rightarrow x + k$

ج) ریشه هایش k برابر باشد: $x \rightarrow \frac{x}{k}$

د) ریشه هایش قرینه باشد: $b \rightarrow -b$

ه) ریشه هایش معکوس باشد: $a \to c$ (جای a و c عوض می شود.)

<u>تذکر نهایی:</u> بهتر است به زوج تست های سال های ۸۵ و ۸۸ و تست های سال های ۸۶ و ۸۷ دقت کنید.

مشابهت تیپ سوال ها آموزنده است.

تابع درجه ی دوم(سهمی) $y = ax^2 + bx + c$

✓ مهم‌ترین نکته در سؤالات مربوط به سهمی، رأس سهمی است:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \to S \begin{vmatrix} x_\circ = -\frac{b}{2a} \\ y_\circ = f(x_\circ) \end{vmatrix} \\ y = a(x - x_\circ)^2 + y_\circ \to S \begin{vmatrix} x_\circ \\ y_\circ \end{vmatrix} \end{cases}$$

✓ محور تقارن سهمی، چون از رأس می گذرد خط $x = x_\circ$ می باشد.

✓
- اگر $\alpha \prec \circ \leftarrow$ سهمی روبه پایین است $\Leftarrow$ سهمی دارای Max است.
- اگر $\alpha \succ \circ \leftarrow$ سهمی روبه بالا است $\Leftarrow$ سهمی دارای Min است.

موارد زیر هم معنی اند:

۱- اگر سهمی دارای دارای Max (یا Min) برابر k باشد.
۲- اگر خط $y = k$ بر سهمی مماس باشد.
۳- اگر خط $y = k$ محور تقارن سهمی را روی خود سهمی قطع کند.
۴- اگر رأس سهمی روی خط $y = k$ واقع باشد.

در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به جای y ، k گذاشته، به یک طرف برده $\leftarrow \Delta = \circ$

۱- اگر سهمی بر محور x ها مماس باشد.
۲- اگر سهمی دارای Max (یا Min) صفر باشد.
۳- اگر Max (یا Min) سهمی بر محور x ها واقع باشد. $\leftarrow \Delta = \circ$
۴- اگر سهمی به فرم اتحاد مربع دوجمله ای باشد.
۵- اگر رأس سهمی بر محور xها واقع باشد.

✓ موارد زیر هم‌معنی‌اند:

۱- رأس سهمی روی محور yها باشد.

۲- سهمی بیش‌ترین (یا کم‌ترین) مقدار خود را روی محور yها اختیار کند.

۳- محور yها ، محور تقارن سهمی باشد.

۴- طول رأس سهمی صفر باشد.

۵- نقاط تلاقی سهمی با محور xها ، قرینه باشد.

- ✓ وقتی دو نقطه‌ی هم‌ارز روی سهمی قرار داشته باشد ، وسط طول این دو نقطه ، طول رأس سهمی را می‌دهد.
- ✓ هر گاه در مسئله ، نوع عبور سهمی از نواحی مختصات مطرح شد ، با رسم شکل علامت‌های Δ ، a ، s، p را معلوم می‌کنیم.